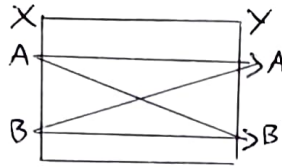


CANAUX DISCRETS

I) Définitions :

canal discret: Système stochastique qui prend en entrée des symboles définis sur un alphabet d'entrée (X) et émet des symboles définis sur un alphabet de sortie (Y).

représentation:



donc canal (X, Y, Π)

→ déf par $\begin{cases} X = \{x_1, \dots, x_L\} \\ Y = \{y_1, \dots, y_J\} \\ \text{loi de transition} \\ \Pi = (P(y_j | x_i))_{i,j} \end{cases}$

adjectifs: causal : qui dépend du temps et des entrées passées.

sans mémoire : la sortie à t ne dépend que de l'entrée à t .

mémoire finie : ne dépend que d'un nombre fini d'entrées passées.

stationnaire : invariant par décalage temporel.

symétrique : matrice de transition Π vérifie: lignes identiques à permutation près.
 ↳ fortement sym. si les colonnes aussi.

II) Capacité:

Entropie d'une source: $H(X) = - \sum_{i=1}^L P(X=x_i) \log_2 (P(X=x_i))$

Information moyenne apportée par la sortie sur l'entrée: $I(X, Y) = H(Y) - \underbrace{H(Y|X)}_{\text{ambiguïté / incertitude moy.}}$

Capacité d'un canal: $C = \max_{(P(x_i))} I(X, Y)$

↳ Qte max d'infor qui peut être transmise en une seule fois.

↳ Si on essaie de transmettre plus, l'erreur est élevée.

↳ Si on essaie de transmettre moins, on peut rendre la proba d'erreur arbitrairement petite.

(voir page suivante)

III) Théorèmes:

1. Pour un canal symétrique, la capacité est atteinte lorsque $\forall i, P(X=x_i) = \frac{1}{|X|}$
2. Soit un canal discret sans mémoire utilisé pour transmettre des mots de longueur n . Avec $\begin{cases} \text{entrée } X^n = (X_1, \dots, X_n) \\ \text{sortie } Y^n = (Y_1, \dots, Y_n) \end{cases}$ Alors $I(X^n, Y^n) \leq \sum_{i=1}^n I(X_i, Y_i)$

définition: probabilité d'erreur est la proba qu'un des symboles de sortie soit différent du symbole d'entrée correspondant.

$\hookrightarrow$ si $X \neq Y$ et $P_{ij} = P(X=x_i | Y=x_j)$, $P_e = \sum_i \sum_{j \neq i} P_{ij}$.

Rq: $H_2(q) = q \log_2\left(\frac{1}{q}\right) + (1-q) \log_2\left(\frac{1}{1-q}\right)$, très utilisé.

3. Inégalité de Fano: Soit un canal symétrique. Alors $H(Y|X) \leq H_2(P_e) + P_e \log_2(k-1)$
4. 2nd théorème de Shannon: Soit un canal sans mémoire de capacité C et une source X . Alors

$$(H(X) < C) \Rightarrow (\forall \epsilon > 0, \text{ il existe un code tq } P_e < \epsilon)$$

Interprétation: si un canal génère des erreurs, il est quand même possible de trouver un code qui génère suffisamment de redondance pour retrouver le message d'origine.

5. Réciproque du 1: Soit un canal sans mémoire de capacité C sur lequel on transmet des mots de longueur n . Avec m la taille de l'alphabet,

$$P_e \geq \frac{H(X) - C - \frac{1}{n}}{\log_2(m)}$$